PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Facultad de Física
Instituto de Física

Tarea 3

Relatividad y Gravitación

Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Cristóbal Armaza (cyarmaza@uc.cl)

- Puede desarrollar sus respuestas a mano o en formato digital.
- **Plazo de entrega: 27 de octubre al inicio de la I2.**
- Una tarea ordenada hace a un corrector feliz.

Problemas a resolver

Problema 1. Considere una métrica en coordenadas (t, r, θ, ϕ), con elemento de línea

$$ds^2 = -A(r)\,dt^2 + B(r)\,dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2,$$

en donde $A(r)$ y $B(r)$ son funciones derivables arbitrarias. Obtenga

(a) el Lagrangiano para el principio variacional que produce las geodésicas en este espacio;

(b) los símbolos de Christoffel y las geodésicas de este espacio;

(c) el tensor de Riemann, $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$;

(d) el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, y el escalar de Ricci, R;

(e) el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, y su derivada covariante, $G_{\mu\nu;\alpha}$;

(f) la forma explícita de $A(r)$ y $B(r)$ si se satisface la ecuación $R_{\mu\nu} = 0$.

Evalúe todo lo anterior si se cumple lo encontrando en el inciso (f).

Problema 2. Considere una superficie esférica de radio a (medido en metros), descrita por las coordenadas habituales (θ, ϕ). Indique, sólo por análisis dimensional, en qué unidades del Sistema Internacional deben ser expresadas las siguientes cantidades: $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$, $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, R, todas con sus significados usuales. ¿Cómo cambian sus respuestas en un sistema coordenado localmente plano definido en torno a un punto en donde son evaluadas las cantidades mencionadas?

Problema 3. Suponga una métrica casi plana de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

en donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ depende en general de las coordenadas.

(a) Calcule, a primer orden, el tensor de curvatura para este espacio. Para esto, note que $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$. (Solución: $2R_{\alpha\mu\beta\nu} = h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}$.)

(b) Plantee, a primer orden, la ecuación de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0,$$

para la perturbación $h_{\mu\nu}$.

(c) La ecuación encontrada anterior se simplifica si la reescribe en términos de la nueva variable $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma}$. Reescriba, notando también que

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\gamma}{}_{\gamma}$$

(d) Aplique la condición extra

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

y obtenga la forma final de la ecuación de Einstein. Compare con la ecuación de Maxwell encontrada en clase. ¿Cómo interpreta la condición extra aplicada en este inciso?

(e) La perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$ puede interpretarse como ondas en el espacio-tiempo (una "onda gravitacional"). Considere una onda gravitacional plana

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re(A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha)),$$

en donde $A_{\mu\nu}$ es un tensor constante. Muestre que se debe satisfacer $k^\mu k_\mu = 0$ y $A_{\mu\nu}k^\nu = 0$.

Problema 4. Sea un espacio curvo arbitrario, con tensor de Riemann $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ dado, y un vector de Killing ξ^μ de este espacio.

(a) Muestre que $Q = \xi_\mu u^\mu$ es constante a lo largo de una geodésica con vector tangente u^μ.

(b) Demuestre que la derivada covariante NO es conmutativa, sino que, para un vector A^μ cualquiera,

$$A_{\mu;\alpha;\beta} - A_{\mu;\beta;\alpha} = R^{\rho}{}_{\alpha\beta\mu}A_\rho.$$

(c) Demuestre la identidad de Bianchi,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\tau} + R_{\mu\nu\tau\rho;\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\tau;\rho} = 0.$$